

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΑΛΓΕΒΡΑ / Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	31 / 01 / 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 60 Σχολ.

A2. i) Σελ. 32 Σχολ. ii) Σελ. 129 Σχολ. iii) Σελ. 53 Σχολ.

A3. i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το -1 ρίζα του $P(x)$, άρα: $P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + \alpha(-1)^3 - 5(-1)^2 + (\beta - 1)(-1) + 3\beta + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 1 - \alpha - 5 - \beta + 1 + 3\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 2\beta - 2 = 0$ (1).

4 είναι η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 0$, άρα:

$$P(0) = 4 \Leftrightarrow 3\beta + 1 = 4 \Leftrightarrow 3\beta = 4 - 1 \Leftrightarrow 3\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Για $\beta = 1$ η (1) γίνεται $-\alpha + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

B2. Για $\alpha = 0$ και $\beta = 1$, $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $-x \in \mathbb{R}$ και

$$P(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = P(x).$$

Άρα η συνάρτηση $P(x)$ είναι άρτια, επομένως η γραφική της παράσταση παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.

B3. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Θέτω $y = x^2$ ($y \geq 0$), άρα η εξίσωση γίνεται: $y^2 - 5y + 4 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}, \quad \text{άρα } y_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Οπότε θα έχουμε: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Για να δείξω ότι 3 ρίζα του $Q(x)$ αρκεί να δείξω ότι $Q(3) = 0$

$$\text{Ισχύει ότι } Q(3) = P(3^2 - 2 \cdot 3 - 1) = P(9 - 6 - 1) = P(2) = 0.$$

B4. $8\sigma\upsilon\nu 2x = P(0) \Leftrightarrow 8\sigma\upsilon\nu 2x = 4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $0 \leq f(x) \leq 4$ κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $f_{\min} = 0$ και $f_{\max} = 4$.

Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση ο κύκλος τιμών μίας περιόδου της συνάρτησης ξεκινάει από το σημείο $A(0,2)$ και τελειώνει στο $B(4\pi,2)$, επομένως η περίοδος είναι $T = 4\pi$.

Γ2. Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$. Άρα $f(0) = 2 \Leftrightarrow \alpha \eta \mu(\beta \cdot 0) + \gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2$.

Η περίοδος σύμφωνα με τον τύπο της θα είναι $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

Συνεπώς θα ισχύει $\frac{2\pi}{\beta} = 4\pi \Leftrightarrow 4\pi\beta = 2\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$.

Όμως η μέγιστη τιμή της συνάρτησης σύμφωνα με τη γραφική της παράσταση είναι 4 και μία θέση μεγίστου της είναι το $x = \pi$. Επομένως:

$$f(\pi) = 4 \Leftrightarrow \alpha \eta \mu(\beta \cdot \pi) + \gamma = 4 \Leftrightarrow \begin{matrix} \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \alpha \eta \mu \frac{\pi}{2} + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2\eta \mu \frac{x}{2} + 2.$$

Γ3. Γραφικά επειδή το 0 είναι η ελάχιστη τιμή της και στον κύκλο τιμών μίας περιόδου εμφανίζεται μόνο μία φορά και την παίρνει για $x = 3\pi$, θα ισχύει ότι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ θα είναι οι $x = 3\pi \pm \kappa \cdot 4\pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Αλγεβρικά εναλλακτικά έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta \mu \frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\eta \mu \frac{x}{2} = -2 \Leftrightarrow \eta \mu \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \eta \mu \frac{x}{2} = \eta \mu \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa\pi + 3\pi \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή}$$

$$\frac{x}{2} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa\pi + 2\pi - 3\pi \Leftrightarrow x = 4\kappa\pi - \pi \Leftrightarrow x = 4\kappa\pi - 4\pi + 4\pi - \pi$$

$$\Leftrightarrow x = 4\pi(\kappa - 1) + 3\pi \Leftrightarrow x = 4\lambda\pi + 3\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Γ4. Τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων, αν υπάρχουν, θα προέρχονται από την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta \mu \frac{x}{2} + 2 = \left(\eta \mu \frac{x}{2} - 2\right)^2 + 7 \Leftrightarrow 2\eta \mu \frac{x}{2} + 2 = \eta \mu^2 \frac{x}{2} - 4\eta \mu \frac{x}{2} + 4 + 7$$

$$\Leftrightarrow \eta \mu^2 \frac{x}{2} - 6\eta \mu \frac{x}{2} + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(\eta \mu \frac{x}{2} - 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \frac{x}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \eta \mu \frac{x}{2} = 3 \text{ (αδύνατη).}$$

Άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(2026\pi + x) = \varepsilon\varphi(1013 \cdot 2\pi + x) = \varepsilon\varphi x,$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \varepsilon\varphi\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(11\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(5 \cdot 2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Ο τύπος της f , για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γίνεται:

$$f(x) = \varepsilon\varphi(2026\pi + x) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(11\pi + x) + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \varepsilon\varphi x \cdot (-\sigma\varphi x) - \eta\mu x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x.$$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(-x) = \eta\mu(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = -f(x). \quad \text{Άρα } f \text{ περιττή.}$$

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προφανώς $x - \pi \in \mathbb{R}$ και $x + \pi \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi)$. Είναι:

$$f(x - \pi) = \eta\mu(x - \pi) \sigma\upsilon\nu(x - \pi) = \eta\mu[-(\pi - x)] \sigma\upsilon\nu[-(\pi - x)] =$$

$$= -\eta\mu(\pi - x) \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\eta\mu x (-\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = f(x)$$

$$f(x + \pi) = \eta\mu(x + \pi) \sigma\upsilon\nu(x + \pi) = \eta\mu(\pi + x) \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = (-\eta\mu x)(-\sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = f(x).$$

Επομένως είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Δ4. $1 = 2f(x) \Leftrightarrow 1 = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right), \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow 0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΗ.}$$